

Εξετάσεις Ιουνίου 2022 - Αναλυτική Γεωμετρία

Θέμα 1

Έστω T_1 το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία $A_1(1, 1)$, $B_1(3, 1)$, $C_1(2, 2)$ και T_2 το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία $A_2(1, 0)$, $B_2(3, 0)$, $C_2(2, -1)$.

- (i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα T_1 και T_2 είναι ίσα.
- (ii) Βρείτε ισομετρία $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ έτσι ώστε $\Phi(T_1) = T_2$.

Θέμα 2

Στον ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 δίνεται η επιφάνεια Σ με εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$$

και το επίπεδο Π_α με εξίσωση $x + y + z = \alpha$, όπου το α είναι ένας πραγματικός αριθμός.

- (i) Να αποδείξετε ότι η επιφάνεια Σ παριστάνει σφαίρα, της οποίας να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Ποιο είναι το συμμετρικό του κέντρου της Σ ως προς το επίπεδο $x = 1$;
- (ii) Για ποιες τιμές του α , ισχύει ότι $\Pi_\alpha \cap \Sigma \neq \emptyset$; Για ποιες τιμές του α το επίπεδο Π_α εφάπτεται της σφαίρας Σ ;

Θέμα 3

Στον ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 θεωρούμε την επιφάνεια Σ με εξίσωση

$$x^2 + 2x + y^2 - z = 0$$

- (i) Δείξτε ότι η τομή της Σ με το επίπεδο $z = 3$ παριστάνει κύκλο C του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
- (ii) Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία του κύκλου C στο σημείο $P(1, 0, 3)$.

Θέμα 4

Ας είναι a ένας πραγματικός αριθμός και $C_a \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$$x^2 + 2axy + y^2 = 1$$

- (i) Για ποιες τιμές του a το C_a παριστάνει ζεύγος ευθειών;
- (ii) Για ποιες τιμές του a το C_a παριστάνει υπερβολή;

Θέμα 5

Έστω A πραγματικός συμμετρικός 3×3 πίνακας. Συμβολίζουμε Q την τετραγωνική μορφή της οποίας ο πίνακας ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 είναι ο A . Θεωρούμε το σύνολο

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Q(x, y, z) = 1\}$$

- (i) Δείξτε ότι το σύνολο Σ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι θετικές.
- (ii) Για ποιους πίνακες A το σύνολο Σ παριστάνει σφαίρα ακτίνας $R > 0$;

- Διάρκεια εξέτασης **2 ώρες**.
- Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
- Μη τεκμηριωμένες απαντήσεις δεν λαμβάνονται υπόψη.
- Σοβαρά μαθηματικά λάθη θα επηρεάσουν αρνητικά τη βαθμολογία.

Καλή επιτυχία